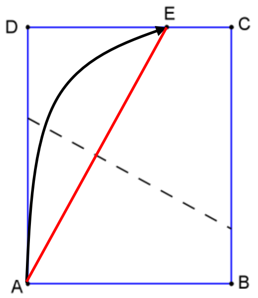
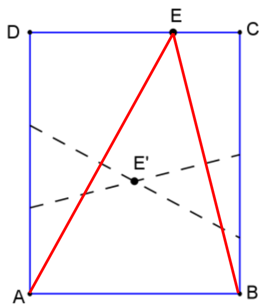
PIEGARE E SCOPRIRE – Seconda parte

Proviamo a rispondere alle domande 1. e 2. poste nella prima parte.
La piega che abbiamo ottenuto sovrapponendo il vertice A al punto E rappresenta l'asse di simmetria del segmento AE, in rosso in figura:



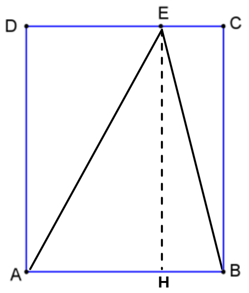


Analogamente, l'altra piega rappresenta l'asse di simmetria del segmento BE, perciò, se guardiamo il triangolo ABE, possiamo affermare che il punto E' è il punto di intersezione degli assi dei suoi lati:

il punto E' è il circocentro del triangolo ABE.

In questo modo, abbiamo risposto anche alla domanda 1., perché l'asse del lato AB del triangolo è proprio il segmento MN, e alla domanda 5.

Vediamo ora la domanda 2., analizzando cosa succede se facciamo variare il punto E sul lato CD.
Il problema si trasforma: non si tratta di scoprire dei punti casuali, ma di vedere *come varia il circocentro E' di tutti i possibili triangoli* ABE.



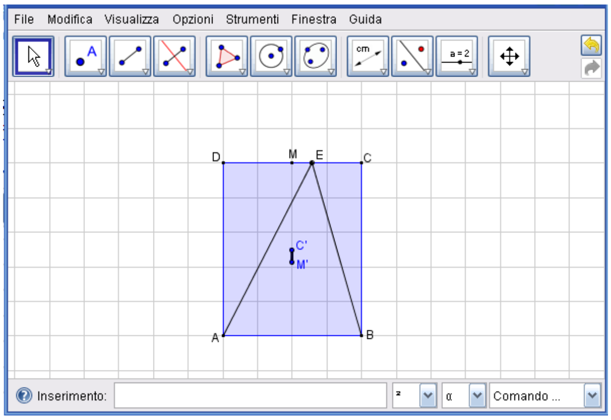
Osserviamo che tutti i triangoli ABE sono tra loro equivalenti, perché tutti hanno la stessa base fissata AB e la stessa altezza AD = EH.

Possiamo esprimere il problema nei termini seguenti:

"determinare qual è il luogo dei circocentri di triangoli equivalenti di base fissata"

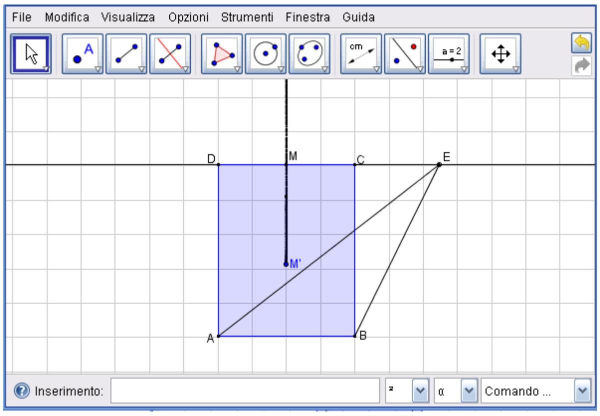
Facendo alcune costruzioni in cui il vertice E del triangolo ABE è vincolato al segmento CD, vediamo che il circocentro varia tra C' e M':

- è in C', centro del rettangolo ABCD, se E coincide con C o con D, cioè se ABE è un triangolo rettangolo in A o in B
- è in M' se E coincide con il punto medio M di CD, cioè se ABE è un triangolo isoscele



In GeoGebra abbiamo realizzato la visualizzazione del problema: il circocentro del triangolo ABE è ottenuto segnando un punto nell'intersezione degli assi (nascosti) di AE e BE.
Cliccando sul tasto destro del mouse e sul circocentro è possibile ottenere la traccia del circocentro con il comando Traccia, in modo che muovendo E su CD il circocentro mostra le posizioni assunte che descrivono il segmento C'M': questa è dunque la risposta al problema.

Se invece il vertice E fosse libero di muoversi su una retta parallela alla base passante per C e D, allora il luogo dei circocentri dei triangoli equivalenti ABE sarebbe una semiretta, perpendicolare alla base AB, avente origine nel circocentro M' del triangolo isoscele ABM.



Possiamo fidarci dello strumento informatico?

I software che permettono di visualizzare oggetti della geometria o dell'algebra costituiscono un buon ambiente sperimentale, come il foglio di carta da cui siamo partiti. Essi offrono infatti la possibilità di verificare congetture, sostenere l'immaginazione, far nascere intuizioni o intravedere la soluzione di problemi.
Tali strumenti, per necessità, approssimano i calcoli e la rappresentazione geometrica, e non sempre possono fornire soluzioni esatte. Sono però costruiti nel rispetto delle definizioni degli oggetti della matematica, usando piccoli artifici per ovviare a errori grossolani.
La dimostrazione di certi risultati è tuttavia dominio della razionalità umana.

Una risposta geometrica

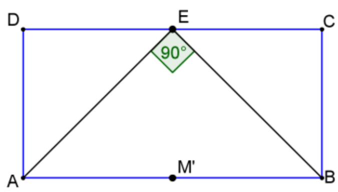
Possiamo dimostrare il risultato che abbiamo intuito, che il luogo dei circocentri di triangoli equivalenti ABE con E vincolato al segmento CD è un segmento che ha estremi C', centro del rettangolo ABCD e M', circocentro del triangolo isoscele ABM?
Rispondiamo alle seguenti domande:

6. A quale distanza dalla base AB si trova M', circocentro del triangolo isoscele ABM?
7. Quanto è lungo il segmento C'M'?

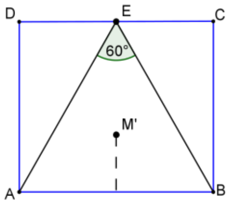
Prima di tutto vediamo come il problema posto dipenda dalle dimensioni del foglio rettangolare, considerando rettangoli ABCD particolari e il triangolo isoscele ABE, con E coincidente con il punto medio M di CD. In questi casi calcoliamo la distanza del circocentro M' dalla base AB e calcoliamo la lunghezza del segmento C'M' come differenza di M' dal centro del rettangolo.

1. La base è doppia dell'altezza: AB = 1 e AD = $\frac{1}{2}$

   La distanza è 0, perché in questo caso il triangolo è isoscele e rettangolo: il circocentro si trova nel punto medio dell'ipotenusa, appartiene quindi alla base. C'M' = $\frac{1}{2}$



2. Il triangolo è equilatero. La base è AB = 1, l'altezza AD = $\dfrac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}866$



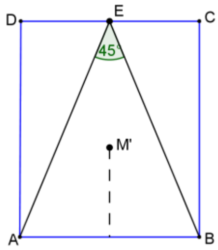
Il circocentro coincide con il baricentro: la distanza di M' dalla base AB è quindi un terzo dell'altezza.

$$d(\text{M'}, \text{AB}) = \frac{1}{3}\,\text{AD} = \frac{\sqrt{3}}{6} \approx 0{,}288$$

$$\text{C'M'} = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{12}$$

3. L'angolo al vertice è di 45°. La base è AB = 1, l'altezza AD = $\dfrac{\sqrt{2}+1}{2} \approx 1{,}207$

   Il circocentro è il centro della circonferenza circoscritta al triangolo: l'angolo alla circonferenza AEB è la metà dell'angolo al centro AM'B. Dato che AEB = 45°, allora AM'B = 90° e la distanza del circocentro dalla base AB è uguale alla sua metà:

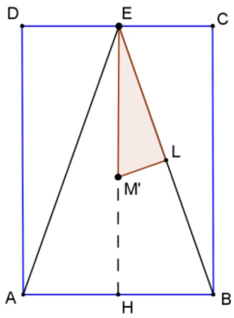


$$d(\text{M'}, \text{AB}) = \frac{1}{2}\,\text{AB}$$

$$\text{C'M'} = \frac{\sqrt{2}+1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}-1}{4}$$

4. Il rettangolo è d'argento, ha base AB = 1 e altezza AD = $\sqrt{2}$
   Calcoliamo la lunghezza del lato BE del triangolo ABE con il teorema di Pitagora:

$$\text{BE} = \sqrt{\text{HB}^2 + \text{EH}^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = \frac{3}{2}$$



I triangoli BEH e M'LE sono simili: questa osservazione permette di scrivere la proporzione

$$\text{EL} : \text{EH} = \text{EM'} : \text{EB}$$

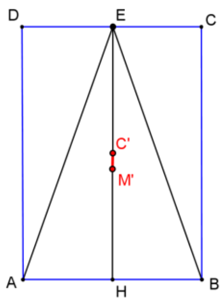
$$\frac{3}{4} : \sqrt{2} = \text{EM'} : \frac{3}{2}$$

e di calcolare EM':

$$\text{EM'} = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{9}{16}\sqrt{2}$$

La distanza del circocentro dalla base AB è dato da EH − EM' = $\dfrac{7}{16}\sqrt{2}$

Calcoliamo infine la lunghezza del segmento C'M', descritto dal circocentro nel caso in cui il vertice E è vincolato al lato CD di un foglio che ha dimensioni 1 e $\sqrt{2}$: in figura il segmento è il luogo descritto dal circocentro al variare di E sul lato CD.

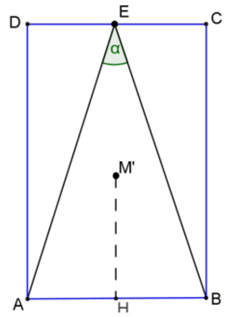


Ricordiamo che C' è il centro del foglio, quindi C'H = $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ e M'H = $\dfrac{7}{16}\sqrt{2}$.

C'M' $= \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{7}{16}\sqrt{2} = \dfrac{1}{16}\sqrt{2}$, cioè $\dfrac{1}{16}$ dell'altezza AD.

5. L'angolo al vertice è ottuso. La base AB = 1, l'altezza AD è minore di 0,5
   Il circocentro è esterno al triangolo.

6. Generalizziamo:
   l'angolo al vertice è α; la base AB = 1 e l'altezza CD è legata al valore di α.

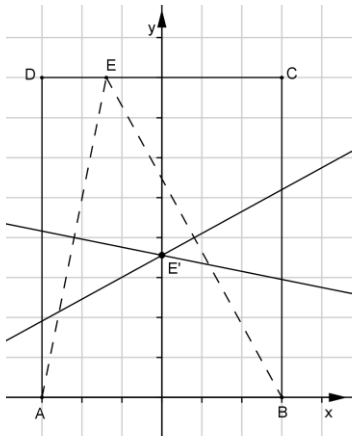


   Sappiamo che il circocentro è il centro della circonferenza circoscritta al triangolo e il suo raggio è r = AM' = EM' = BM' = $\dfrac{AB}{2sen\alpha} = \dfrac{1}{2sen\alpha}$. Applicando il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo AHM', possiamo ricavare la distanza del circocentro dalla base:

$$d(\mathrm{M'}, \mathrm{AB}) = \sqrt{\mathrm{AM'}^2 - \mathrm{AH}^2} = \frac{\mathrm{cotg}\alpha}{2}$$

$$\mathrm{CD} = \frac{\cos\alpha + 1}{2\mathrm{sen}\,\alpha} = \frac{1}{2}\mathrm{cotg}\frac{\alpha}{2} \quad \text{e} \quad \mathrm{C'M'} = \frac{1-\cos\alpha}{4\mathrm{sen}\,\alpha} = \frac{1}{4}\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$$

Una risposta analitica



Inseriamo il rettangolo ABCD nel piano cartesiano, con A e B sull'asse delle x, simmetrici rispetto all'origine.

Fissiamo la base AB = 1, quindi A($-\frac{1}{2}$; 0) e B($\frac{1}{2}$; 0)

Indichiamo con k la lunghezza dell'altezza AD, quindi E(x_E; k)

Calcoliamo:

- l'equazione dell'asse di AE: $y - \dfrac{k}{2} = -\dfrac{2x_E + 1}{2k}\left(x - \dfrac{2x_E - 1}{4}\right)$
- l'equazione dell'asse di BE: $y - \dfrac{k}{2} = \dfrac{1 - 2x_E}{2k}\left(x - \dfrac{2x_E + 1}{4}\right)$
- le coordinate del circocentro E': $\begin{cases} \text{asse di AE} \\ \text{asse di BE} \end{cases} \rightarrow$ E' $\left(0; \dfrac{(2x_E)^2 + 4k^2 - 1}{8k}\right)$

Osserviamo:

- l'ascissa del circocentro E' è nulla: abbiamo così dimostrato che il circocentro appartiene all'asse delle y indipendentemente dalla posizione di E

- l' ordinata del circocentro E' dipende dal valore di k e dell'ascissa di E: se $x_E = 0$, allora E si trova sull'asse y e il triangolo ABE è isoscele. Assegnando a k i valori particolari $\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$, $\sqrt{2}$, sono confermate le considerazioni fatte precedentemente nei casi 1.- 2. - 3. - 4.
  Se $0 < k < \frac{1}{2}$ l'ordinata di E' assume un valore negativo, considerato nel caso 5.

- se il punto E non è vincolato al segmento CD, ma varia sulla retta $y = k$, il circocentro E' è funzione di $x_{E'}$ e varia sull'asse y dal valore minimo $y_{E'} = \dfrac{4k^2 - 1}{8k}$, ottenuto da $x_{E'} = 0$, fino all'infinito.
  Abbiamo così dimostrato che il luogo del circocentro è una semiretta perpendicolare alla base AB.